

插值 FFT 估计正弦信号频率的精度分析

齐国清, 贾欣乐

(大连海事大学信息工程学院, 辽宁大连 116026)

摘 要: 对噪声背景中插值 FFT 方法估计正弦信号频率的精度进行了研究, 导出了不加窗和加 Hanning 窗时频率估计均方根误差与信噪比及 FFT 长度的关系式; 分析了不加窗情况下当信号频率接近 FFT 频率分辨率 Δf 的整数倍时, 由于插值的方向错误对频率估计精度的影响; 指出了不加窗时该方法在噪声背景中的频率估计误差远远大于文 [2] 中用一个特定的纯测试信号得到的结果; 讨论了加窗对频率估计误差的影响. 最后给出了 Monte Carlo 模拟实验与理论分析的对比结果.

关键词: 频率估计; FFT; 精度分析

中图分类号: TN911.72 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2004) 04-0625-05

Accuracy Analysis of Frequency Estimation of Sinusoid Based on Interpolated FFT

QI Guo-qing, JIA Xin-le

(School of Electronic and Information Engineering, Dalian Maritime University, Dalian, Liaoning 116026, China)

Abstract: The accuracy of the frequency estimation technique of sinusoid based on the interpolated FFT is investigated. Formulas for evaluating the root-mean-square (RMS) error of frequency estimation for different signal-to-noise ratio and different FFT length without weighting window and with Hanning window are derived. Study results show that when the frequency of the signal is close to the center of the main lobe of the FFT, due to the inversion of the interpolation direction, the interpolated FFT without weighting window results in large errors in frequency estimation. Therefore in noise background, the frequency estimation error of the interpolated FFT method is much larger than that achieved by Jain in [2] using a given pure test sinusoid signal. The effect of the weighting window on frequency estimation accuracy is also discussed. Computer Monte Carlo simulation results fit well with the formulas given in this paper.

Key words: frequency estimation; FFT; accuracy analysis

1 引言

正弦信号频率的估计方法很多, 基于 DFT 的频率估计方法可以利用 FFT 实现因而速度快、便于实时处理. DFT 对正弦信号的信噪比增益作用使得基于 DFT (FFT) 的频率估计方法比直接在时域估计频率的方法信噪比阈值低很多. 在信噪比很低时, 只要 DFT 长度足够大, 仍可进行频率估计, 因此这种方法得到广泛应用. 但由于 FFT 得到的是离散频率值, 离散频率的间隔限制了频率估计精度. 只有当信号频率为 FFT 频率分辨率 Δf 的整数倍时, FFT 得到的频率估计值是准确的. 当信号频率与 FFT 的离散频率不重合时, 由于 FFT 的“栅栏”效应, 信号的实际频率位于两条谱线之间. 可将信号频率表示为 $f_0 = (k_1 + \delta)\Delta f$, 其中 k_1 为 FFT 幅度最大值对应的离散频率索引值 (index), Δf 为 FFT 频率分辨率, δ 表示信号频率与 FFT 幅度最大值位置的相对偏差. 显然仅仅利用 FFT 的幅度最大值估计信号频率无法估计 δ , 因而估计精度较低. 当信号频率

偏离 FFT 离散谱线时, 正弦信号的 FFT 在主瓣内两条谱线, 次大谱线与最大谱线的幅度比值随 δ 的变化而不同, 根据这一性质 Rife 和 Vincent^[1] 首先提出了利用正弦信号 DFT 主瓣内两条谱线的幅度的变化提高正弦信号的频率和幅度估计精度的方法. Jain 等^[2] 进一步研究了这种方法并提出了插值 FFT 正弦信号参数估计方法. 这种方法既保留了基于 FFT 的正弦信号参数估计方法速度快的特点又提高了估计精度. 插值 FFT 方法近年来在很多领域中得到了应用, 文献 [3~5] 提出的提高 FFT 的频率估计精度方法以及文献 [6] 中提出的提高 FMCW 雷达测距精度方法都采用了插值 FFT 技术. 在振动信号分析中为了提高频率测量精度也采用了这种技术并称为 DFT 幅度比值法^[7-11]. 上述文献虽然对插值 FFT 法的原理进行了详细的介绍, 但均未对噪声背景中插值 FFT 法的频率估计误差与信噪比及 FFT 长度的关系进行详细的理论分析, 而仅用个别测试信号或次数较少的计算机模拟说明该方法的频率估计精度. 文 [2] 中用测试信号进行模拟实验, 结果表明在

收稿日期: 2002-08-29; 修回日期: 2003-08-16

不加窗情况下频率估计相对误差 σ_δ (相对误差定义为 $\sigma_\delta = \sigma_f/\Delta f$, σ_f 为频率估计均方根误差) 达到 2×10^{-4} . 文[7~9]中均指出加 Hanning 窗 DFT 幅度比值法频率估计误差 σ_δ 达到 10^{-4} , 不加窗(加矩形窗)频率估计误差在 10^{-3} 量级^[9]. 然而, 理论分析和模拟实验表明, 在噪声背景中该方法的频率估计精度比理想情况大大降低. 用[2]的测试信号, 在加性高斯白噪声中, 信噪比为 12dB 时, FFT 长度与文[2]相同 ($N = 2048$), 频率估计均方根误差为 4×10^{-3} . 另外, 不加窗时频率估计误差与 δ 取值关系很大. 当 δ 较小时, 由于确定 FFT 次大谱线位置很容易出错, 致使估计的 δ 与实际值符号相反, 使频率估计均方误差大大增加^[12]. 如将文[2]中的第一个信号的频率从 $20.2\Delta f$ 变为 $20.05\Delta f$ (其它条件同前), 计算机模拟结果显示频率估计均方根误差为 $\sigma_\delta = 4 \times 10^{-2}$, 即 $\delta = 0.05$ 时频率估计均方根误差是 $\delta = 0.2$ 时的 10 倍. 文献[11]也指出当 δ 接近零时, DFT 幅度比值法频率估计误差较大. 在加 Hanning 窗、信噪比为 30dB 情况下, 计算机模拟表明频率估计均方根误差在 10^{-3} 量级. 要达到 10^{-4} , 信噪比要在 50dB 以上. 本文将对高斯白噪声背景中 FFT 插值法估计频率在不加窗和加窗情况下分别能够达到的精度进行分析, 并利用 Monte Carlo 模拟对分析结果进行验证.

2 插值 FFT 估计频率原理

单一频率实正弦信号表示为

$$s(t) = a \cos(2\pi f_0 t + \theta_0) \quad (1)$$

其中 a 、 f_0 和 θ_0 分别为正弦信号的幅度、频率和初相. 按等间隔 $\Delta t = T/N$ 对 $s(t)$ 在 $0 \sim T$ 区间内进行采样得到长度为 N 的序列 $s(n)$. $s(n)$ 的 N 点 DFT 记为 $S(k)$, 鉴于实序列的 DFT 的对称性, 忽略 DFT 频谱的负频率成分, 只考虑离散频谱的前 $N/2$ 点, 有

$$S(k) = \frac{a \cdot \sin[\pi(k - f_0 T)]}{2\sin[\pi(k - f_0 T)/N]} \cdot e^{j[\theta_0 - \frac{N-1}{N}\pi(k - f_0 T)]}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N/2 - 1 \quad (2)$$

$S(k)$ 幅度最大值处的离散频率索引值记做 k_1 , $k_1 = \text{int}[f_0 T]$, $\text{int}[x]$ 表示取最接近 x 的整数. 对于较大的 N , 在幅度最大处, $S(k)$ 的幅度可以近似表示为

$$A_1 = |S(k_1)| = \frac{Na \sin(\pi\delta)}{2\pi\delta} \quad (3)$$

其中 $\delta = (f_0 - k_1 \Delta f)/\Delta f$ 为信号频率与其 DFT 幅度最大处对应频率的相对偏差, $\Delta f = 1/T$, δ 的变化范围为 $-0.5 \sim 0.5$. 在紧邻 k_1 的左侧和右侧的两条谱线中幅度较大处(以下称为幅度次大值, 对应的离散频率索引值记做 k_2 , $k_2 = k_1 \pm 1$), $S(k)$ 的幅度可近似表示为

$$A_2 = |S(k_2)| = \frac{Na |\sin(\pi\delta)|}{2\pi(1 - |\delta|)} \quad (4)$$

A_2 与 A_1 的比值记做 α , 根据式(3)和式(4), 有

$$\alpha = \frac{A_2}{A_1} = \frac{|\delta|}{1 - |\delta|} \quad (5)$$

根据 A_2 与 A_1 的比值可以得到 $|\delta|$ 的估计值

$$|\hat{\delta}| = \frac{\alpha}{1 + \alpha} = \frac{A_2}{A_1 + A_2} \quad (6)$$

根据 δ 值可对由离散频谱得到的 f_0 的估计值进行插值从而得到更精细的频率估计值

$$\hat{f}_0 = (k_1 \pm |\hat{\delta}|) \Delta f \quad (7)$$

式中符号根据 k_2 的位置确定, 若 $k_2 = k_1 + 1$ 取加号, 反之取减号.

3 高斯白噪声背景中插值 FFT 方法的频率估计误差

在加性噪声背景中的观测值采样序列可以表示为 $r(n) = s(n) + z(n)$, $z(n)$ 为高斯白噪声序列, 其方差为 σ_z^2 , 采样序列的信噪比为 $SNR_0 = a^2/(2\sigma_z^2)$. $r(n)$ 的 DFT 可表示为

$$R(k) = S(k) + Z(k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (8)$$

$Z(k)$ 的方差为^[12]

$$\text{var}[Z(k)] = N\sigma_z^2 \quad (9)$$

在 $N(SNR_0)$ 较大的情况下, 采样序列 $r(n)$ 的 DFT 在最大谱线处的幅度可近似表示为^[12]

$$|R_1| = A_1 + \text{real}(Z_1) = A_1 + U_1 \quad (10)$$

Z_1 为迭加在 $S(k)$ 幅度最大处的噪声, $U_1 = \text{real}(Z_1)$ 为 Z_1 的实部. 同理, 当 δ 不接近 0 (即次大谱线的幅度不接近 0) 时, DFT 次大谱线的幅度可表示为

$$|R_2| = A_2 + \text{real}(Z_2) = A_2 + U_2 \quad (11)$$

Z_2 为迭加在 $S(k)$ 幅度次大值处的噪声, $U_2 = \text{real}(Z_2)$ 为 Z_2 的实部. Z_1 和 Z_2 均与 $Z(k)$ 同分布, 因此 U_1 和 U_2 均服从高斯分布, 而且不加窗时 U_1 和 U_2 相互独立, $\text{var}(U_1) = \text{var}(U_2) = N\sigma_z^2/2$.

因此噪声背景中采样序列的 DFT 幅度次大值与最大值之比 α 可表示为

$$\alpha = \frac{|R_2|}{|R_1|} = \frac{A_2}{A_1} \frac{1 + U_2/A_2}{1 + U_1/A_1} \quad (12)$$

在信噪比较高或 N 较大情况下, U_1/A_1 及 U_2/A_2 大于或接近 1 的概率很小, 在下面分析估计误差时忽略这种小概率情况而假设 $U_1/A_1 \ll 1$ 及 $U_2/A_2 \ll 1$. 因此可以将上式展开成级数, 并略去高次项, α 可近似表示为

$$\alpha = \frac{A_2}{A_1} \left(1 + \frac{U_2}{A_2} - \frac{U_1}{A_1}\right) \quad (13)$$

因此噪声背景中 δ 的估计值可近似表示为(以下在不致引起混淆的情况下忽略 δ 的绝对值符号)

$$\hat{\delta}_\alpha = \frac{\alpha}{1 + \alpha} = \frac{1}{A_1 + A_2} \cdot \frac{A_2 + U_2 - \frac{A_2}{A_1} U_1}{1 + \frac{1}{A_1 + A_2} (U_2 - \frac{A_2}{A_1} U_1)} \quad (14)$$

同理也可以将式(14)展开成级数, 并略去高次项, 于是 δ 的估计值可近似示为

$$\hat{\delta}_\alpha = \frac{A_2}{A_1 + A_2} + \frac{A_1}{(A_1 + A_2)^2} (U_2 - \frac{A_2}{A_1} U_1) - \frac{1}{(A_1 + A_2)^2} (U_2 - \frac{A_2}{A_1} U_1)^2 \quad (15)$$

由于上式的最后一项远小于前两项, 可以忽略不计, 所以上式又可以近似为

$$\hat{\delta}_\alpha = \frac{A_2}{A_1 + A_2} + \frac{A_1}{(A_1 + A_2)^2} (U_2 - \frac{A_2}{A_1} U_1) \quad (16)$$

所以, $\hat{\delta}_\alpha$ 的方差可表示为

$$\text{var}(\hat{\delta}_\alpha) = \frac{A_1^2}{(A_1 + A_2)^4} (1 + \frac{A_2^2}{A_1^2} \frac{N\sigma_z^2}{2} = \frac{A_1^2 + A_2^2}{(A_1 + A_2)^4} \frac{N\alpha^2}{4(SNR_0)}) \quad (17)$$

将 A_1 和 A_2 代入式(17),整理,并考虑到 $E(\hat{\delta}_\alpha) = \delta$, 得 $\hat{\delta}_\alpha$ 的均方误差

$$\text{mse}(\hat{\delta}_\alpha) = \text{var}(\hat{\delta}_\alpha) = \frac{(1 - |\delta|)^2 [(1 - |\delta|)^2 + \delta^2]}{N(SNR_0) \text{sinc}^2(\delta)} \quad (18)$$

当 $\delta = 0.5$ 时, $\hat{\delta}_\alpha$ 的均方误差最小, 为

$$\text{mse}(\hat{\delta}_\alpha) = \frac{\pi^2}{32N(SNR_0)} \quad (19)$$

当 δ 接近 0 时, 上述分析不成立. 当 $\delta = 0$ 时, $A_2 = 0, A_1 = N\alpha/2, |R_2| = |Z_2|, |R_1| \approx A_1, \alpha \approx |Z_2|/A_1 = 2|Z_2|/(N\alpha)$. 当 δ 接近 0 时, $\alpha \approx \delta, \hat{\delta}_\alpha$ 的均方误差可表示为

$$\text{mse}(\hat{\delta}_\alpha) = \text{mse}(\alpha) = E(\alpha^2) = \frac{E(|Z_2|^2)}{(N\alpha)^2} = \frac{N\sigma_z^2}{(N\alpha)^2} = \frac{2}{N(SNR_0)} \quad (20)$$

而式(18)在 $\delta = 0$ 处的值为 $1/(N \cdot SNR_0)$.

DFT 系数幅度最大值 R_1 及次大值 R_2 都位于 sinc 函数的主瓣内, $k_2 = k_1 \pm 1$. 当 δ 接近 0 时, $|R_2|$ 较小, 与最大谱线另一侧第一旁瓣内的谱线幅度 $|R_3|$ 接近, R_3 的位置记做 $k_3, k_3 = k_2 \pm 2$. 可以证明, 无噪声干扰时始终有 $|R_2| > |R_3|$. 但是, 在噪声干扰背景下, 当 δ 较小时会发生 $|R_2| < |R_3|$ 的情况. 根据前面的讨论, δ 的符号根据第二大谱线是位于最大谱线的左边还是右边来确定, 因此 DFT 幅度第二大谱线位置的错误将造成 δ 的符号错误. 当信号的实际频率为 $f_0 = (k_1 + \delta)\Delta f$ 时, 根据 DFT 系数幅度次大值与最大值的比值得到的频率估计值为 $\hat{f}_0 = (k_1 - \delta)\Delta f$, 从而造成频率估计出现 $(2\delta)\Delta f$ 的误差. 若这种错误出现的概率较大, 则这种频率估计方法失去意义. 发生这种情况的概率与 DFT 点数 N 以及信噪比有关, 同时也与 δ 值本身的大小 (即信号频率偏离最大谱线的大小) 有关. 因此对应一定的 DFT 点数和信噪比, 存在一个阈值 δ_{TH} , 只有在 $\delta > \delta_{TH}$ 时, 才能利用 DFT 系数的幅度信息进行频率插值.

为了确定上述情况造成的 δ 估值的误差, 需首先求出发生这种判断错误的概率. 根据式(2), $S(k)$ 在 k_3 处的幅度为

$$A_3 = \frac{N\alpha |\sin(\pi\delta)|}{2\pi(1 + |\delta|)} \quad (21)$$

因此 R_3 的幅度可以表示为

$$|R_3| = A_3 + \text{real}(Z_3) = A_3 + U_3 \quad (22)$$

将 R_3 当作第二大值的概率为 $P_e(\delta) = P(|R_3| > |R_2|)$. 代入 $|R_3|$ 及 $|R_2|$, 整理得

$$P_e(\delta) = P[\frac{1}{\sqrt{N}\sigma_z} (U_3 - U_2) > \frac{\delta |\sin(\pi\delta)|}{\pi(1 - \delta^2)} \sqrt{2N(SNR_0)}] \quad (23)$$

因 $E(U_3) = E(U_2) = 0, \text{var}(U_3) = \text{var}(U_2) = N\sigma_z^2/2$, 又 U_3 与 U_2 均服从正态分布且互不相关, 有

$$\text{var}[\frac{1}{\sqrt{N}\sigma_z} (U_3 - U_2)] = 1 \quad (24)$$

所以

$$P_e(\delta) = \frac{1}{2} \text{erfc}[\frac{\delta |\sin(\pi\delta)|}{\pi(1 - \delta^2)} \sqrt{N(SNR_0)}] \quad (25)$$

其中, $\text{erfc}(x)$ 为补误差函数. 因此, 给定 DFT 长度 N 、信噪比和 δ , 利用上式可计算出相应的 $P_e(\delta)$. 根据 $P_e(\delta)$ 可计算次大值方向错误造成的频率估计的 (相对) 均方误差为

$$\text{mse}(\hat{\delta}_e) = (2\delta)^2 P_e(\delta) = 2\delta^2 \text{erfc}[\frac{\delta |\sin(\pi\delta)|}{\pi(1 - \delta^2)} \sqrt{N(SNR_0)}] \quad (26)$$

因此插值 FFT 方法估计频率的总的 (相对) 均方误差为

$$\sigma_T^2 = \text{mse}(\hat{\delta}_\alpha) + \text{mse}(\hat{\delta}_e) \quad (27)$$

将(18)和(26)代入(27), 得

$$\sigma_T^2 = \frac{(1 - |\delta|)^2 [(1 - |\delta|)^2 + \delta^2]}{N(SNR_0) \text{sinc}^2(\delta)} + 2\delta^2 \text{erfc}[\frac{\delta |\sin(\pi\delta)|}{\pi(1 - \delta^2)} \sqrt{N(SNR_0)}] \quad (28)$$

4 加窗对频率估计误差的影响

为了抑制频谱泄漏, 通常在进行 FFT 之前对采样序列进行加窗处理. 加窗后 A_1 和 A_2 仍随 δ 变化, 但变化规律不同于式(3)和式(4), 因此不能用式(6)估计 δ 值. 对于 Hanning 窗, 加窗后仍可得到利用 A_2 和 A_1 的比值 α 估计 δ 的解析式^[9], 而对于其它窗函数可以采用数值方法获得利用 α 估计 δ 的对应关系. 下面以 Hanning 窗为例, 讨论加窗情况下插值 FFT 方法的频率估计误差. 根据文献[9], 在加 Hanning 窗情况下, 可按下式估计 δ

$$|\hat{\delta}| = \frac{2\alpha - 1}{\alpha + 1} \quad (29)$$

将(13)代入(29), 得

$$|\hat{\delta}| = \frac{2A_2 - A_1}{A_1 + A_2} + \frac{3A_1}{(A_1 + A_2)^2} (U_2 - \frac{A_2}{A_1} U_1) \quad (30)$$

由于加窗后 U_1 和 U_2 相关, 不能像式(17)那样直接计算 δ 的方差. 根据公式 $\text{var}(x \pm y) = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 \pm 2\rho_{xy}\sigma_x\sigma_y$, 其中 σ_x^2 和 σ_y^2 分别为 x 和 y 的方差, ρ_{xy} 为 x 和 y 的相关系数, 有

$$\text{var}(\hat{\delta}) = \frac{9A_1^2}{(A_1 + A_2)^4} [\text{var}(U_2) - \frac{A_2^2}{A_1^2} \text{var}(U_1) - \frac{A_2}{A_1} 2\rho_{12} \text{std}(U_1) \text{std}(U_2)] \quad (31)$$

$\text{std}(x)$ 表示 x 的标准差, 窗函数记为 $w(n)$, 则有

$$\text{var}(U_1) = \text{var}(U_2) = \sigma_z^2 \sum_{n=0}^{N-1} w^2(n) = G_w N\sigma_z^2 \quad (32)$$

式中, $G_w = \sum_{n=0}^{N-1} w^2(n)/N$. 将式(32)代入(31), 得

$$\text{var}(\hat{\delta}) = \frac{9(A_1^2 + A_2^2 - 2\rho_{12}A_1A_2)NG_w}{4(A_1 + A_2)^4 SNR_0} \quad (33)$$

式中, ρ_{12} 为 U_1 和 U_2 的相关系数, ρ_{12} 与窗函数有关, 且可由下式确定

$$\rho_{12} = \frac{\text{cov}(U_1, U_2)}{\text{std}(U_1)\text{std}(U_2)} = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} w^2(n) e^{j2\pi(n/N)}}{\sum_{n=0}^{N-1} w^2(n)}$$

$$= \frac{1}{NG_w} \sum_{n=0}^{N-1} w^2(n) e^{j2\pi(n/N)} \quad (34)$$

对于 Hanning 窗, $w(n) = 0.5 - 0.5\cos(2\pi n/N)$, 当 $N = 1024$ 时, $G_w = 0.375$, $\rho_{12} = 0.67$. 给定窗函数, 可以确定对应不同 δ 值的 A_1 、 A_2 值. 构造一个正弦信号序列 $s_0(n) = \cos[2\pi(f + \delta)n/N]$, $f < N/2$, δ 从 0 到 0.5 按照一定步长增加, δ 每取一个值, 对 $s_0(n)$ 与窗函数 $w(n)$ 的乘积做 FFT, 找到 FFT 的幅度最大值 A_1 和 A_2 , 得到对应不同 δ 值的 A_1 和 A_2 的取值. 将以上结果代入式(33)便可得到对应给定的信噪比和 FFT 长度的 δ 的估计值的均方误差.

由于加窗使得正弦信号的 FFT 主瓣变宽, A_3 也在主瓣之内, 其幅度及随 δ 的变化率与不加窗时相比均大大增加. 又由于 U_3 与 U_2 相关(经过计算可得, 对于 Hanning 窗, $\rho_{23} = 0.17$), 出现 $|R_3| > |R_2|$ 的概率大大降低, 次大值方向错误造成的频率估计的误差可以忽略. 因此加窗情况下, δ 的估计误差由式(33)确定.

5 理论分析与计算机模拟结果对比

利用计算机 Monte Carlo 模拟方法对插值 FFT 估计正弦信号频率进行模拟试验, 将模拟试验结果的频率估计均方根误差(σ_δ)与本文得到公式的计算结果进行对比. 图 1 中实线所示为不加窗情况下, $N = 1024$, 不同信噪比条件下按(28)计算

的频率估计均方根误差. 从图示结果可见, 在不加窗情况下, 当 δ 较小时, 受噪声影响很容易出现 δ 估计值的符号错误, 当 δ 小于某一阈值 δ_{TH} 时, δ 的估计误差迅速增加, 例如 $N = 1024$, 信噪比为 12dB, δ_{TH} 约为 0.1. 当 $\delta < \delta_{TH}$, FFT 插值估计频率失去意义. 因此在不加窗的情况下, δ_{TH} 限定了 FFT 插值估计频率的精度, 信噪比为 42dB 时, 频率估计均方根误差只能达到 $10^{-2}\Delta f$. 图 1 中虚线为加 Hanning 窗时相同条件下按式(33)计算的频率估计均方根误差, 与不加窗相比, 避免了在 δ 较小时频率估计误差增加的现象, 但在相同信噪比和 FFT 长度情况下, 当 $\delta > \delta_{TH}$ 时, 比不加窗时的估计误差增加. 因为加窗使得 FFT 有效数据长度缩短, 降低了 FFT 对正弦信号的信噪比增益, 造成信噪比损失约 3~5dB. 图 2 为不加窗时 $N = 1024$, 信噪比分别为 12、24 和 42dB 时公式(28)计算的频率估计均方根误差结果与模拟结果对比(模拟次数为 500), 实线为模拟结果, 虚线为公式计算结果, 可见模拟结果与公式计算结果吻合的很好. 图 3 为相同条件下加窗时频率估计均方根误差, 虚线所示为加 Hanning 窗时按式(33)计算的频率估计均方根误差, 实线为对应的计算机模拟结果, 模拟实验结果与本文得到的公式的计算结果非常接近; 图中细点线为加 4 阶 Blackman-Harris 窗时, 频率估计均方根误差的模拟实验结果, 估计误差略大于加 Hanning 窗的结果, 因为 Blackman-Harris 窗的旁瓣更低, 信噪比损失也比 Hanning 窗大.

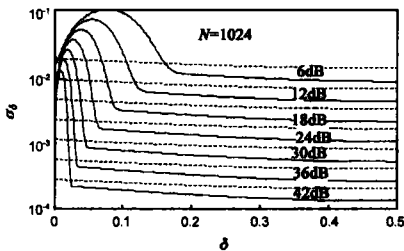


图 1 不加窗(实线)与加 Hanning 窗(虚线)理论计算的频率估计均方根误差对比

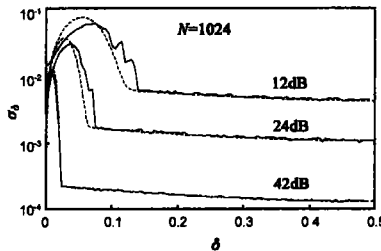


图 2 不加窗时频率估计均方根误差理论计算(虚线)与模拟结果(实线)对比

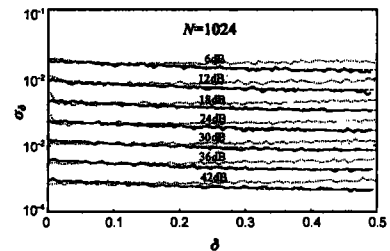


图 3 加窗时频率估计均方根误差理论计算与模拟结果对比

6 结论

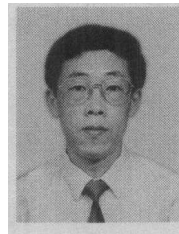
利用 FFT 主瓣内两条最大谱线进行插值可以提高基于 FFT 的频率估计方法的精度, 但实际应用中能够达到的精度受噪声的影响远远低于理想情况下得到的结果. 本文经过理论分析得出了插值 FFT 法的频率估计均方根误差与信噪比、FFT 长度以及信号实际频率与 FFT 幅度最大值位置对应的频率的偏差 δ 的关系. 分析结果表明不加窗时, 当 δ 小于某一阈值 δ_{TH} 时, 由于插值出现方向错误使得频率估计均方误差迅速增加. 因此不加窗的插值 FFT 法的频率估计均方根误差在实际应用中很难低于 $10^{-2}\Delta f$. 加窗可以基本避免因插值方向错误引起的误差, 但加窗也带来 FFT 的信噪比增益 3~5dB 的损失. 在 $N = 1024$ 、信噪比为 30dB 情况下, 加窗后频率估计均方根误差约为 FFT 的频率分辨率 Δf 的千分之一. 计算机模拟结果与本文得到的公式计算结果吻合.

参考文献:

- [1] Rife D C, Vincent G A. Use of the discrete Fourier transform in the measurement of frequencies and levels of tones [J]. Bell Sys. Tech. J., Feb. 1970, 49: 197-228.
- [2] Jane V K, Collins W L Jr, Davis D C. High-accuracy analog measurements via interpolated FFT [J]. IEEE Trans., 1979, IM-28(2): 113-122.
- [3] 林云松, 黄勇, 肖先赐. 实正弦信号的快速相位差分频率估计方法 [J]. 电子科技大学学报, 1999, 8(2): 120-123.
- [4] 孟建. 相参信号频谱的精确估计 [J]. 系统工程与电子技术, 1999, 21(10): 67-70.
- [5] 喻胜, 陈光福. 一种精确测量周期信号参数的窗口和内插算法 [J]. 电子科技大学学报, 1999, 28(5): 520-523.
- [6] 陈祝明, 丁义元, 向敬成. 提高线性调频连续波雷达测距精度的

- 最大值估值方法 [J]. 系统工程与电子技术, 1999, 21(6): 39 - 42.
- [7] 丁康, 张晓飞. 频谱校正理论的发展 [J]. 振动工程学报, 2000, 13(1): 15 - 22.
- [8] 朱小勇, 丁康. 离散频谱校正方法的综合比较 [J]. 信号处理, 2001, 17(1): 91 - 97.
- [9] 丁康, 谢明, 王志杰. 离散频谱的幅值、相位和频率的校正方法及误差分析 [J]. 动态分析与测试技术, 1996, 14(1): 10 - 29.
- [10] 谢明, 丁康. 离散频谱分析的一种新校正方法 [J]. 重庆大学学报, 1995, 18(2): 47 - 54.
- [11] 刘渝. 快速高精度正弦波频率估计综合算法 [J]. 电子学报, 1999, 27(6): 126 - 128.
- [12] 齐国清. FMCW 液位测量雷达系统设计及信号处理方法研究 [D]. 博士学位论文, 大连: 大连海事大学, 2001

作者简介:



齐国清 男, 1960 年生于辽宁凌海, 1982 年毕业于大连工学院电子工程系, 1984 年在大连海运学院电子工程系获硕士学位, 2001 年在大连海事大学获博士学位, 1993 年至 1995 年在新加坡标准与工业研究院从事 FMCW 液位测量雷达研究工作, 现为大连海事大学信息工程学院教授, 主要研究方向: 信号检测与参数估计, DSP 应用系统设计, FMCW 雷达, 船舶导航雷达.

贾欣乐 男, 1932 年生于辽宁辽阳, 教授, 博士生导师, 1959 年毕业于清华大学研究生班. 现为大连海事大学控制工程教授, 主要研究兴趣为智能控制用于船舶系统和船舶操纵运动.

www.cnki.net